Graduate J. Math. 1 (2018), 1 – 14

Les « invariants arithmétiques » de Poincaré

Nicolas Bergeron

Résumé

Le texte qui suit a été écrit pour accompagner un exposé donné à l'IHP le 23 novembre 2012, à l'occasion du centenaire de la disparition d'Henri Poincaré. La vidéo est visible en ligne à l'adresse ci-dessous [1]. Dans le texte, on décrit en détail, et à l'aide de notations modernes, deux articles remarquables de Poincaré. Ceux-ci traitent des relations entre formes automorphes et théorie des nombres. On explique en particulier que Poincaré, 50 ans avant Eichler et Shimura, démontre l'isomorphisme d'Eichler-Shimura. On tâche surtout de montrer que Poincaré a déjà clairement en tête un lien fort entre fonctions L et formes automorphes.

MSC 2010. Primary : 01A55 ; Secondary : 10Dxx.

Introduction

Dans la citation suivante, tirée de "L'avenir des mathématiques", Poincaré montre bien son intérêt pour les "questions de nombres".

> Un domaine arithmétique où l'unité semble faire absolument défaut, c'est la théorie des nombres premiers ; on n'a trouvé que des lois asymptotiques et l'on n'en doit pas espérer d'autres ; mais ces lois sont isolées et l'on n'y peut parvenir que par des chemins différents qui ne semblent pas pouvoir communiquer entre eux. Je crois entrevoir d'où sortira l'unité souhaitée, mais je ne l'entrevois que vaguement ; tout se ramènera sans doute à l'étude d'une famille de fonctions transcendantes qui permettront, par l'étude de leurs points singuliers et l'application de la méthode de Darboux, de calculer asymptotiquement certaines fonctions de très grands nombres.

On peut penser que les familles de fonctions transcendantes auxquelles il fait allusion sont les *formes automorphes* et les points singuliers les *pointes* ou *cusps* des variétés localement symétriques correspondantes. Ces objets jouent en effet un rôle clef dans le "programme de Langlands" qui apporte peut-être l'unité que Poincaré appelle de ses vœux dans ces lignes. On sait ce que doit le programme de Langlands à la théorie des formes automorphes initiée par ce même Poincaré. Il n'est donc guère surprenant qu'aussitôt après avoir inventé les fonctions fuchsiennes, ce dernier ait cherché à les appliquer à des questions de théorie des nombres.

> Il est clair que les propriétés générales des fonctions fuchsiennes s'appliquent aux fonctions modulaires [...]

et c'est principalement dans deux articles que notre héros s'y emploie. Tout d'abord dans son mémoire intitulé *Sur les invariants arithmétiques*, paru au journal de Crelle en 1905 et qu'on l'on peut trouver dans le tome V des *Œuvres*. (C'est ce travail que nous détaillons en premier lieu dans la suite.) Mais aussi dans son tout dernier article — qu'il envoie le 7 juillet 1912, la veille de son départ pour la clinique où il est décédé — intitulé *Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes*, que l'on peut trouver dans le tome II des *Œuvres*.

Ces deux articles sont remarquables par bien des points mais ce qui saute tout d'abord aux yeux du lecteur est, il me semble, une grande absence d'unité. Les résultats sont disparates, on a du mal à voir où Poincaré veut en venir et quelles sont les applications arithmétiques. Ma thèse est que cela illustre bien la citation ci-dessus : l'unité n'est pas encore faite, mais où que l'on regarde en théorie analytique des nombres, surgissent des fonctions fuchsiennes — ou automorphes. C'est avant tout ce que nous montre Poincaré. Les applications arithmétiques manquent bel et bien. La seule semble, à première vue, être une démonstration légèrement différente de la formule de Dirichlet sur le nombre de classe des corps quadratiques. Tout cela peut décevoir mais il ressort aussi de la lecture que Poincaré met en place la plupart des outils modernes. Nous allons voir comment surgissent les séries de Poincaré, les sommes de Kloosterman, mais aussi que toutes les différentes constructions de formes automorphes associées à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ évoquées par Gelbart dans son livre [4] de 1973 sont déjà connues de Poincaré. On verra aussi que Poincaré, 50 ans avant Eichler et Shimura, démontre l'isomorphisme d'Eichler-Shimura. On verra enfin que Poincaré explicite déjà le lien entre fonctions L et formes automorphes. Manque l'arithmétique à proprement parler

1. `http://video.upmc.fr/differe.php?collec=S_pointcare100_2013&video=17`

et qui attendra Hecke. Manque aussi l'unité que Poincaré appelle de ses vœux. Poincaré n'est peut-être pas un théoricien des nombres mais … le créateur de la théorie des formes automorphes.

Partie I. Invariants des formes linéaires

Relativement à la base canonique de $\mathbf{C}^2$ on peut représenter toute forme $\mathbf{C}$-linéaire sur $\mathbf{C}^2$ par une matrice colonne $\left(\begin{smallmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{C}^2$. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ opère linéairement sur ces vecteurs colonnes. Cette action est transitive ; une fonction

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto F(\omega_1, \omega_2) \tag{0.0.1}$$

invariante par l'action $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ est donc constante.

Poincaré appelle *invariant arithmétique* une fonction (0.0.1) invariante sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$:

$$F(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = (\omega_1, \omega_2) \tag{0.0.2}$$
$$(a, b, c, d \in \mathbf{Z},\ ad - bc = 1).$$

Si l'on demande de plus que F soit homogène de poids k :

$$F(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-k} F(\omega_1, \omega_2), \tag{0.0.3}$$

il correspond à F la fonction $f(z) = F(z, 1)$ qui est *modulaire de poids* k :

$$f(z) = f_{|_k g}(z) := (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$
$$\text{pour tout } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}). \tag{0.0.4}$$

Comme le rappelle Poincaré, un bon exemple d'invariant arithmétique est fourni par la série [2]

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = {\sum_{m,n}}' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2k}}, \tag{0.0.5}$$

où le symbole $\sum'$ signifie que la somme porte sur tous les couples d'entiers $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ *différents de* $(0, 0)$. Si k est un entier > 1 cette série converge absolument. Il correspond donc à G_k une fonction modulaire — encore notée G_k — qui est de poids $2k$ et vérifie

$$G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$$

voir [7, Chapitre VII, §2.3] par exemple.

Poincaré se demande, dans un premier temps, si ces fonctions modulaires — vues comme fonctions de $z \in \mathbf{H}$ — peuvent être représentées par les *séries thétafuchsiennes* qu'il a plus généralement associées à tout groupe fuchsien Γ et non seulement au groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

2. Série que nous savons maintenant avoir été pour la première fois considérée par Eisenstein ; voir [10].

1 Des séries thétafuchsiennes aux séries de Poincaré

Soit k un entier pair > 2 et soit f une fonction rationnelle sur $\mathbf{CP}^1$ qui n'a pas de pôle réel et s'annule à l'ordre k en l'infini. Dans son mémoire sur les groupes fuchsiens, Poincaré montre que la série

$$\sum_{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} f_{|_k g}(z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \tag{1.0.1}$$

est absolument convergente, de somme une fonction modulaire de poids k. Ce sont précisemment les *séries thétafuchsiennes* associées au groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Poincaré distingue essentiellement trois types de fonctions modulaires (nous ne considérons que des poids pairs) :

1.1 Définition. On note $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{H} \dashrightarrow \mathbf{C}$ méromorphes qui sont modulaires de poids $2k$ et sont méromorphes à l'infini, c'est-à-dire que dans la variable $q = e^{2\pi i z}$ la fonction f s'exprime comme somme d'une série

$$\sum_{n \geq n_0} a_n q^n. \tag{1.1.1}$$

On note $\mathcal{M}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_k$ constitué des fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}$ et holomorphes à l'infini, c'est-à-dire qui s'expriment comme somme de (1.1.1) avec $n_0 = 0$.

On note enfin $\mathcal{S}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_k$ constitué des fonctions qui s'annulent à l'infini, c'est-à-dire qui s'expriment comme somme de (1.1.1) avec $n_0 = 1$.

On vérifie facilement que si k est un entier > 1 la série G_k appartient à $\mathcal{M}_k$. D'un autre côté Poincaré montre la proposition suivante dans son mémoire sur les groupes fuchsiens.

1.2 Proposition. *Toute série thétafuchsienne s'annule à l'infini. L'espace* $\mathcal{S}_k$ *est engendré par les séries thétafuchsienne* (1.0.1) *associées à des fractions rationnelles qui n'ont pas de pôle dans* $\mathbf{H}$.

Poincaré cherche alors à obtenir les séries G_k comme des "dégénérescences" de séries thétafuchsiennes. Poincaré considère [3] pour cela la fraction rationnelle

$$h(z, \tau) = \frac{1}{(\tau z - 1)^{2k}} \quad (z, \tau \in \mathbf{H}). \tag{1.2.1}$$

1.3 Lemme. *Soit* $g \in \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. *On a :*

$$h(\cdot, \tau)_{|_{2k} g}(z) = h(z, \cdot)_{|_{2k} J g^{-1} J}(\tau),$$

où $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

3. Poincaré travaille avec le cusp en 0 plutôt qu'en l'infini et donc avec la fraction rationnelle $1/(z - \tau)^{2k}$.

Démonstration. On a :

$$
\begin{aligned}
h(\cdot,\tau)_{|2kg}(z) &= (cz+d)^{-2k} h\left(\frac{az+b}{cz+d},\tau\right) \\
&= (cz+d)^{-k}\frac{1}{\left(\tau\frac{az+b}{cz+d}-1\right)^{2k}} \\
&= \frac{1}{(\tau(az+b)-(cz+d))^{2k}} \\
&= \frac{1}{(z(a\tau-c)-(-b\tau+d))^{2k}} \\
&= (-b\tau+d)^{-2k}\frac{1}{\left(\frac{a\tau-c}{-b\tau+d}z-1\right)^{2k}} \\
&= h(z,\cdot)_{|2kJg^{-1}J}(\tau).
\end{aligned}
$$

□

La fonction thétafuchsienne

$$
\begin{aligned}
\Theta(z,\tau) &= \sum_{g\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} h(\cdot,\tau)_{|2kg}(z) \qquad (1.3.1)\\
&= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} \frac{1}{(\tau(az+b)-(cz+d))^{2k}}
\end{aligned}
$$

est alors modulaire en les deux variables. Poincaré groupe les termes de (1.3.1), en réunissant ceux des termes qui deviennent égaux lorsque τ tend vers 0. Il obtient ainsi la proposition suivante.

1.4 Proposition. *Supposons $k>1$. Alors la série* (1.3.1) *converge absolument et*

$$
\begin{aligned}
&\Theta(z,\tau)\\
&= \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!\tau^{2k}}\sum_{m=1}^{+\infty} m^{2k-1}e^{-2\pi i\frac{m}{\tau}}\left(\sum_{\substack{c,d\in\mathbf{Z}\\ c\wedge d=1}}(cz+d)^{-2k}e^{2\pi i m\frac{az+b}{cz+d}}\right)\\
&= \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!\tau^{2k}}\sum_{m=1}^{+\infty} m^{2k-1}e^{-2\pi i\frac{m}{\tau}}\left(\sum_{[g]\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})}(e^{2\pi i m\cdot})_{|2kg}\right).
\end{aligned}
$$

Noter que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})_\infty = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \middle| n\in\mathbf{Z}\right\}$. Dans la première identité le couple (a,b) est un choix arbitraire de couple d'entiers tel que $ad-bc=1$.

Démonstration. On a :

$$
\begin{aligned}
&\Theta(z,\tau)\\
&= \sum_{[g]\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})}\sum_{n\in\mathbf{Z}} h(\cdot,\tau)_{|2k\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)g}(z)\\
&= \sum_{\substack{c,d\in\mathbf{Z}\\ c\wedge d=1}}\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(\tau(cz+d)n+\tau(az+b)-(cz+d))^{2k}}\right).
\end{aligned}
\tag{1.4.1}
$$

Nous en déduisons maintenant le développement de Taylor de la série (1.3.1) par rapport à $q=e^{2\pi i z}$.

On part de la formule bien connue

$$
\pi\cot\pi z = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right). \tag{1.4.2}
$$

On a par ailleurs :

$$
\begin{aligned}
\pi\cot\pi z = \pi\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z} &= i\pi\frac{q+1}{q-1} \qquad (1.4.3)\\
&= i\pi-\frac{2i\pi}{1-q}\\
&= i\pi-2i\pi\sum_{m=0}^{+\infty}q^m.
\end{aligned}
$$

D'où, en comparant :

$$
\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right) = i\pi-2i\pi\sum_{m=0}^{+\infty}q^m. \tag{1.4.4}
$$

Par dérivations successives de (1.4.4), on obtient la formule suivante (valable pour $k\geq 2$) :

$$
\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(z+n)^k} = \frac{1}{(k-1)!}(-2i\pi)^k\sum_{m=1}^{+\infty}m^{k-1}q^m. \tag{1.4.5}
$$

Posant $A=\tau(az+b)-(cz+d)$ et $B=\tau(cz+d)$ la somme intérieure dans (1.4.1) se réécrit

$$
\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(A+Bn)^{2k}} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!B^{2k}}\sum_{m=1}^{+\infty}m^{2k-1}e^{2\pi i m\frac{A}{B}}.
$$

Puisque

$$
\frac{A}{B} = \frac{az+b}{cz+d}-\frac{1}{\tau},
$$

on obtient l'expression annoncée qui est bien absolument convergente car la somme interne est dominée par la série $\sum(cz+d)^{-2k}$ qui est absolument convergente si $k>1$. □

1.5 Séries de Poincaré

Poincaré est donc naturellement amené à introduire ce que nous appelons maintenant les *séries de Poincaré*

$$
\begin{aligned}
P_m(z,k) &= \sum_{[g]\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})}(e^{2\pi i m\cdot})_{|2kg}\\
&= \sum_{\substack{c,d\in\mathbf{Z}\\ c\wedge d=1}}(cz+d)^{-2k}e^{2\pi i m\frac{az+b}{cz+d}} \quad (n\in\mathbb{N},\ k>1).
\end{aligned}
\tag{1.5.1}
$$

Les séries de Poincaré $P_m(z,k)$ avec $m>0$ s'annulent à l'infini ; elles appartiennent donc à $\mathcal{S}_k$. Noter que, comme le remarque Poincaré, elles peuvent très bien être identiquement nulles ; c'est d'ailleurs nécessairement le cas pour $k=2,3,4,5,7$. Il résulte toutefois de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle f sur $\mathbf{CP}^1$ qui n'a pas de pôle dans $\overline{\mathbf{H}}$ et de la proposition 1.2 que les séries de Poincaré $P_m(z,k)$, $n\geq 1$, engendrent l'espace $\mathcal{S}_k$. Ce que l'on démontre maintenant à l'aide du produit de Petersson.

1.6 Sommes de Kloosterman

Pour obtenir les séries $G_k = P_0(z,k)$ elles-même comme dégérescences de séries thétafuchsiennes, Poincaré est contraint de considérer une fraction rationnelle avec des pôles dans $\mathbf{H}$ qu'il fait également tendre vers 0. De manière plus intéressante, Poincaré considère dans les toutes dernières pages de son mémoire posthume le développement de Fourier des séries $P_m(z,k)$. Ces dernières sont en effet 1-périodiques en z de sorte que la théorie de Fourier implique qu'elles peuvent être développées en série du type

$$P_m(z,k) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{P}_m(n,k)e^{2\pi inz}$$

pour certains coefficients $\widehat{P}_m(n,k) \in \mathbf{C}$. Pour $m \neq 0$, la formule qu'il obtient — maintenant classique (voir [6, §1.5]) — est de la forme

$$\widehat{P}_m(n,k) = \left(\frac{n}{m}\right)^{k-\frac{1}{2}}\left(\delta_{m,n} - 2\pi(-1)^k\sum_{c=1}^{+\infty} J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\frac{K(m,n,c)}{c}\right), \tag{1.6.1}$$

où J_{2k-1} est une fonction de Bessel de développement en série entière (convergeant sur $\mathbf{C}$ tout entier)

$$J_{2k-1}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(n+2k-1)!}z^{2n}$$

et

$$K(m,n,c) = \sum_{\substack{1\leq x<c\\ x\wedge c=1}} e^{\frac{1}{c}(mx+n\bar{x})}, \quad \text{avec } x\bar{x}\equiv 1 \pmod c. \tag{1.6.2}$$

C'est la naissance des *sommes de Kloosterman*! Poincaré n'aura pas l'occasion de les étudier plus avant [4] mais elles réapparraissent 14 ans plus tard — indépendamment des calculs de Poincaré — dans un article de Kloosterman qui saura en tirer une application remarquable au nombre de représentations d'un entier par une forme quadratique à quatre variables.

1.7 Un exemple d'application : la conjecture de Ramanujan

L'espace $\mathcal{S}_6$ est de dimension 1 engendré par la fonction Δ (voir [7]) :

$$\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n \quad (q = e^{2\pi iz}). \tag{1.7.1}$$

Ainsi toute série de Poincaré $P_m(z) = P_m(z,6)$ est un multiple de $\Delta(z)$: $P_m(z) = c(m)\Delta(z)$. On peut alors déduire — voir [5, p. 56] — de (1.6.1) que pour $n > 1$ on a :

$$\tau(n) = 2\pi\nu n^{\frac{11}{2}}\sum_{c=1}^{+\infty} J_{11}\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right)\frac{K(1,n,c)}{c}, \tag{1.7.2}$$

où ν est une constante absolue.

Le développement (1.7.2) semble atroce. Mais Kloosterman démontre la majoration $|Km,n,p)| < 2p^{3/4}$ que Weil — par une démonstration bien plus délicate — étend en la majoration (optimale en ce qui concerne l'exposant de p) :

$$|Km,n,p)| \leq 2\sqrt{p} \quad (\text{si } p \text{ ne divise pas } mn). \tag{1.7.3}$$

Il n'est pas difficile d'en déduire que

$$K(1,n,c) = O_\varepsilon\left(c^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

En utilisant cette majoration dans la série du membre de droite de (1.7.2) ainsi que la majoration suivante (voir par exemple [9]) de la fonction J_{11} de Bessel

$$J_{11}(x) = O\left(\min\left\{x^{11}, \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}\right),$$

on conclut :

$$\tau(n) = O_\varepsilon\left(n^{\frac{11}{2}+\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

C'est une première majoration non triviale allant dans le sens de la conjecture de Ramanujan — démontrée en 1974 par Deligne — selon laquelle [5] $|\tau(n)| \leq d(n)n^{11/2}$.

2 Polynomes de périodes

Il correspond à toute fonction modulaire de poids 2 une différentielle $f(z)dz$ invariante par $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ qui descend donc sur la surface modulaire. S'il existait $f \in \mathcal{S}_1$ il lui correspondrait donc une forme abélienne dont, suivant Abel, nous pourrions calculer les périodes le long de courbes fermées. Dans une deuxième partie de son mémoire Poincaré se propose de généraliser cela à n'importe quel éléments de $\mathcal{S}_k$.

Soit k un entier > 1. Partant d'une forme modulaire $f \in \mathcal{S}_k$ — ou plus généralement d'un fonction modulaire $f \in \mathcal{A}_k$ — Poincaré l'intègre $2k-1$ fois par rapport à z pour obtenir une fonction F de z telle que $D^{2k-1}F = f$ avec $D = \frac{d}{dz}$. Cela conduit à introduire :

2.1 Définition. On appelle *différentielle abélienne généralisée* toute fonction méromorphe $F : \mathbf{H} \dashrightarrow \mathbf{C}$ telle que $f := D^{2k-1}F \in \mathcal{A}_k$. On dit que F est de *première espèce* si $f \in \mathcal{S}_k$, sinon F est dite de *seconde espèce.*

Remarque. Deux différentielles abéliennes généralisées F_1 et F_2 telle que $D^{2k-1}F_1 = D^{2k-1}F_2 = f$ ne diffèrent que d'un polynôme de degré $\leq 2k-2$. Poincaré ne les regarde pas comme différentes. On peut toujours écrire $f(z) = \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} a_nq^n$, il correspond alors à f une différentielle abélienne privilégiée donnée par

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^{2k-1}}\sum_{n\geq n_0}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{2k-1}}q^n$$

4. Il remarque juste que $K(m,n,c)$ "n'est pas nulle en général".

5. Ici $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

— appelée *intégrale d'Eichler*. Noter que F est encore 1-périodique.

Soit F une différentielle abélienne généralisée. Le lemme suivant (laissé en exercice) permet à Poincaré d'associer un *polynôme de période* à chaque élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

2.2 Lemme (Identité de Bol). *Pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a :*

$$D^{2k-1}(F_{|_{2-2k}g}) = (D^{2k-1}F)_{|_k g}.$$

Il découle en effet du lemme 2.2 que pour tout $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a :

$$\begin{aligned} &D^{2k-1}\left((cz+d)^{2k-2}F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - F(z)\right) \\ &= (cz+d)^{-2k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - f(z) = 0. \end{aligned}$$

Il existe donc un polynôme $P_g \in \mathbf{C}[z]$ de degré $\leq 2k-2$ tel que

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2-2k}F(z) + (cz+d)^{2-2k}P_g(z). \tag{2.2.1}$$

Noter que si F est choisi comme étant 1-périodique et si $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $P_T = 0$.

Poincaré considère

> le nombre des coefficients arbitraires des périodes.

Pour cela notons $\mathbf{V} = \mathbf{V}_k$ l'espace des polynômes de degré $\leq 2k-2$. On munit $\mathbf{V}_k$ de l'action (à droite) de $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ donnée par $(g, P) \mapsto P_{|g} = P_{|_{2-2k}g}$. En termes modernes, l'application $g \mapsto P_g$ vérifie la *relation de cocycle* : [6]

$$P_{g_1g_2} = (P_{g_1})_{|g_2} + P_{g_2}.$$

Ainsi Poincaré cherche à calculer la dimension de l'espace des cocycles associés aux périodes de différentielles abéliennes généralisées, quotienté par le sous-espace des cobords : $g \mapsto P_{|g} - P$, pour un certain $P \in \mathbf{V}$. En vertu de la remarque ci-dessus, cela conduit naturellement à introduire la définition suivante.

2.3 Définition. Le groupe

$$\begin{aligned} &Z_0^1(\Gamma, \mathbf{V}) := \\ &\Big\{c : \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathbf{V} \Big| c(T) = 0,\ c(g_1g_2) = c(g_1)_{|g_2} + c(g_2) \\ &\qquad \forall g_1, g_2 \in \Gamma\Big\} \end{aligned}$$

est appelé groupe des 1-*cocycles paraboliques* à valeur dans $\mathbf{V}$. Le sous-groupe

$$\begin{aligned} &B_0^1(\Gamma, \mathbf{V}) \\ &:= \Big\{c : \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathbf{V} \Big| c(T) = 0,\ c(g) = P_{|g} - P\ (\forall g), \\ &\qquad \text{pour un } P \in \mathbf{V}\Big\} \\ &= \langle c : \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mapsto (cX+d)^{2k-2} - 1 \in \mathbf{C}[X] \rangle. \end{aligned}$$

est le groupe des 1-*cobords*. Le quotient

$$H_0^1(\Gamma, \mathbf{V}) = Z_0^1(\Gamma, \mathbf{V})/B_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$$

est le premier groupe de *cohomologie* de Γ à coefficients dans $\mathbf{V}$.

Soit F une intégrale abélienne généralisée telle que $D^{2k-1}F = f$. On peut supposer que F est 1-périodique. Le cocycle $g \mapsto P_g$ correspondant est alors parabolique et sa classe modulo les cobords définit un élément dans $H_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$. Cet élément ne dépend que de f (et non de F) ; on le note c_f. Comme le remarque Poincaré

> les fonctions $[F]$ jouent le rôle des intégrales abéliennes [...] les polynômes P jouent le rôle des périodes

On peut en effet rendre cette analogie plus explicite : le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ opère (à gauche) sur le produit $\mathbf{H} \times \mathbf{V}_k$ par $(g, (z, P)) \mapsto (g(z), P_{|g^{-1}})$; au quotient on obtient un fibré holomorphe $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{2k-2}$ au-dessus de la surface modulaire. Une section de ce fibré est la donnée d'une application $z \in \mathbf{H} \mapsto P_z(X) \in \mathbf{C}_{2k-2}[X]$ telle que pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a $P_{g(z)}(X) = (P_z(X))_{|g^{-1}}$ autrement dit $P_z(X) = (P_{gz}(X))_{|g}$. La proposition suivante — qui exprime le cocycle $g \mapsto P_g$ comme un cocycle de périodes au sens de Eichler-Shimura-Manin — explicite la remarque de Poincaré.

2.4 Proposition. *Pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a :*

$$f(g(z))[(g(z) - X)^{2k-2}]_{|g} d(g(z)) = f(z)(X-z)^{2k-2}dz.$$

L'application $z \mapsto f(z)(z-X)^{2k-2}dz$ définit donc une 1-forme holomorphe sur la surface modulaire à valeurs dans le fibré $\mathcal{V}$. De plus, pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a :

$$P_g(X) = \frac{1}{(2k-1)!}\int_{\infty}^{g^{-1}(\infty)} f(z)(z-X)^{2k-2}dz.$$

Démonstration. La première partie résulte d'un calcul similaire au lemme 1.3 : pour tout $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a

$$\begin{aligned} &f(g(z))[(g(z) - X)^{2k-2}]_{|g} d(g(z)) \\ &= (cz+d)^{2k} f(z)(cX+d)^{2k-2}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aX+b}{cX+d}\right)^{2k-2} \frac{dz}{(cz+d)^2} \\ &= f(z)\left((az+b)(cX+d) - (cz+d)(aX+b)\right)^{2k-2} dz \\ &= f(z)(X-z)^{2k-2}dz. \end{aligned}$$

6. Cela se voit immédiatement en remarquant que

$$g \mapsto P_g = F_{|_{2-2k}g} - F$$

est formellement un cobord.

Maintenant, une suite d'intégrations par parties permet en d'écrire :

$$F(z) = \frac{1}{(2k-1)!}\int_z^\infty f(z')(z'-z)^{2k-2}dz'$$

de sorte que, pour tout $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a :

$$\begin{aligned} & P_g(z) \\ &= (F_{|_{2-2k}g})(z) - F(z) \\ &= \frac{1}{(2k-1)!}\Big\{(cz+d)^{2k-2}\int_{g(z)}^\infty f(z')(z'-g(z))^{2k-2}dz' \\ &\qquad - \int_z^\infty f(z')(z'-z)^{2k-2}dz'\Big\} \\ &= \frac{1}{(2k-1)!}\Big\{\int_{g(z)}^\infty f(g^{-1}(z'))(g^{-1}(z')-z)^{2k-2}dg^{-1}(z') \\ &\qquad - \int_z^\infty f(z')(z'-z)^{2k-2}dz'\Big\} \\ &= \frac{1}{(2k-1)!}\int_\infty^{g^{-1}(\infty)} f(z')(z'-z)^{2k-2}dz'. \end{aligned}$$

□

Poincaré démontre ensuite le théorème suivant, redécouvert par Eichler [3] en 1957.

2.5 Théorème. *Les éléments $[c_f]$ associés aux fonctions $f \in \mathcal{A}_k$ engendrent l'espace $H^1_0(\Gamma, \mathbf{V})$ qui est de dimension égale à deux fois la dimension de $\mathcal{S}_k$.*

Autrement dit,

> Le nombre des coefficients arbitraires des périodes est double de celui des intégrales de première espèce.

Ce qui correspond bien à une généralisation du théorème d'Abel. Comme le remarque Poincaré, ce théorème est général (valable pour tout groupe fuchsien). Il ne le démontre toutefois que dans le cas de la surface modulaire. Nous détaillons sa démonstration dans la section suivante, voir aussi [2].

3 Démonstration du théorème 2.5

Soit k un entier relatif et $f \in \mathcal{A}_k$ une fonction modulaire non nulle de poids $2k$ partout méromorphe. Alors, pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et pour tout point $z \in \mathbf{H}$, on a $\mathrm{ord}_z(f) = \mathrm{ord}_{g(z)}(f)$, où $\mathrm{ord}_z(f)$ est l'entier n tel que $w \mapsto f(w)/(w-z)^n$ est holomorphe et non nulle en z. La différentielle $(f'/f - k/(4\pi\mathrm{Im}(z)))dz$ est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-invariante, en l'intégrant le long d'une courbe fermée dans la surface modulaire, on obtient le lemme suivant ; voir [7, Chapitre 7, §3.1].

3.1 Lemme. *Soient $k \in \mathbf{Z}$ et $f \in \mathcal{A}_k$ non nulle. On a :*

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \frac{1}{2}\mathrm{ord}_i(f) + \frac{1}{3}\mathrm{ord}_\rho(f) + \sum_{\substack{[z]\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathbf{H} \\ [z]\neq[i],\ [\rho]}} \mathrm{ord}_z(f) = \frac{k}{6},$$

où $\rho = e^{2\pi i/3}$.

L'ordre de f en un point est un entier qui est positif si f est holomorphe en ce point. Le lemme 3.1 implique donc, en particulier, que si $f \in \mathcal{A}_k$ est holomorphe en i et ρ on a :

$$\#\{\text{pôles de } f \text{ comptés avec multiplicité}\} \geq -d_k, \tag{3.1.1}$$

où

$$d_k := \begin{cases} \left[\frac{k}{6}\right] - 1 & \text{si } k \equiv 1 \pmod 6 \\ \left[\frac{k}{6}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le point clef de la démonstration de Poincaré, du théorème 2.5 est que

$$d_{1-k} + d_k = -1. \tag{3.1.2}$$

Dans son *Mémoire sur les groupes fuchsiens* c'est déjà essentiellement cette remarque qui lui avait permis de démontrer que si k est strictement supérieur à 1, les séries théta-fuchsiennes engendrent l'espace $\mathcal{S}_k$ qui est de dimension $d = d_k$.[7]

À une base $f_1, \ldots, f_d$ de $\mathcal{S}_k$ il correspond $F_1, \ldots, F_d$ telles que

$$D^{2k-1}F_j = f_j \quad (j = 1, \ldots, d).$$

Les F_j engendrent l'espace des intégrales abéliennes généralisées de première espèce. Poincaré introduit également des intégrales abéliennes généralisées de deuxième espèce : soit

$$\Phi(z,\tau) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} \frac{1}{z - \frac{a\tau+b}{c\tau+d}}(c\tau+d)^{2k}.$$

Noter que Φ est modulaire relativement à la variable τ. D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned} & (D^{2k-1}\Phi(\cdot,\tau))(z) \\ &= -(2k-1)! \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} \frac{1}{\left(z - \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^{2k}}(c\tau+d)^{2k} \\ &= -(2k-1)! \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} \frac{1}{((c\tau+d)z - (a\tau+b))^{2k}} \\ &= -(2k-1)! \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} \frac{1}{((dz-b) - \tau(-cz+a))^{2k}} \\ &= -(2k-1)! \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} \frac{1}{\left(\tau - \frac{az+b}{cz+d}\right)^{2k}}(cz+d)^{2k}, \end{aligned}$$

de sorte que $D^{2k-1}\Phi(\cdot,\tau) \in \mathcal{A}_k$. Fixons d points distincts $\tau_1, \ldots, \tau_d \in \mathbf{H}$ n'appartenant pas aux $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-orbites de i et de ρ. On note

$$c_j : g \mapsto (F_j)_{|_{2-2k}g} - F \quad (j = 1, \ldots, d)$$

7. S'il y avait plus de relations entre les séries thétafuchsiennes on pourrait construire un élément de $\mathcal{M}_{1-k}$ sans pôle.

les cocycles associés aux "intégrales abéliennes généralisées" de première espèce F_j et

$$d_j : g \mapsto \Phi(\cdot, \tau_j)_{|2-2k}g - \Phi(\cdot, \tau_j) \quad (j = 1, \ldots, d)$$

les cocycles associés aux "intégrales abéliennes généralisées" de deuxième espèce $\Phi(z, \tau_j)$.

3.2 Lemme. *Les classes*

$$[c_1], \ldots, [c_d], [d_1], \ldots, [d_d] \in H_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$$

sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Si les cocycles c_j et d_j étaient liés dans $H_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$, il existerait des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, $\mu_1, \ldots, \mu_d$ non tous nuls et un polynôme $P \in \mathbf{C}_{2k-2}$ tels que pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on ait :

$$(\lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_d F_d + \mu_1 \Phi(\cdot, \tau_1) + \ldots + \mu_d \Phi(\cdot, \tau_d) - P)_{|2-2k(g-1)} = 0.$$

Autrement dit, on aurait : $\lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_d F_d + \mu_1 \Phi(\cdot, \tau_1) + \ldots + \mu_d \Phi(\cdot, \tau_d) - P \in \mathcal{A}_{1-k}$ avec au plus d pôles simples. Ce qui est en contradiction avec (3.1.1) puisque d'après (3.1.2) on a $-d_{1-k} = d + 1$. □

Il s'agit maintenant de vérifier que l'espace $H_0^1(\Gamma, \mathbf{V}) = Z_0^1(\Gamma, \mathbf{V})/B_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$ est de dimension $\leq 2d_k$. Il est bien connu que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est engendré par les transformations $S = \pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ and $U = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ qui vérifient les relations $S^2 = U^3 = \pm 1$. Un cocycle $c : \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathbf{V}$ dans $Z_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$ vérifie donc $0 = c(I) = c(S)_{|S} + c(S)$ soit

$$c(S)_{|(1+S)} = 0, \tag{3.2.1}$$

et, de la même manière,

$$c(U)_{|(1+U+U^2)} = 0. \tag{3.2.2}$$

Le cocycle c est entièrement déterminé par les polynômes $c(S)$ et $c(U)$, Poincaré cherche donc à calculer les dimensions des espaces

$$W_k^S = \{P \in \mathbf{C}_{2k-2}[X] \mid P_{|(1+S)} = 0\}$$

et

$$W_k^U = \{P \in \mathbf{C}_{2k-2}[X] \mid P_{|(1+U+U^2)} = 0\}.$$

3.3 Une remarque

On a $T = US = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Puisque $c \in Z_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$ on a $c(T) = 0$ et donc $c(S)_{|U} = -c(U)$ de sorte que

$$c(S)_{|(1+U+U^2)} = 0.$$

L'application $c \mapsto c(S)$ identifie donc l'espace $Z_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$ des cocycles paraboliques avec l'espace

$$W_k = \{P \in \mathbf{V}_k \mid P_{|(1+S)} = P_{|(1+U+U^2)} = 0\}$$

alors que l'espace des cobords est identifié à la droite engendré par le polynôme $1 - X^{2k-2} = 1_{|(1-S)}$ associé au polynôme constant égal à 1. Il suffirait alors de calculer la dimension de W_k ; Poincaré procède de manière légèrement différente.

3.4 Fin de la démonstration du théorème 2.5

Les matrices S et U sont, respectivement, conjuguées dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ aux matrices $\widetilde{S} = \pm\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$ et $\widetilde{U} = \pm\left(\begin{smallmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \end{smallmatrix}\right)$. Or un calcul élémentaire donne :

$$\left(\sum_{n=0}^{2k-2} a_n X^n\right)_{|(1+\widetilde{S})} = 2 \sum_{n \equiv k+1 \pmod 2} a_n X^n \tag{3.4.1}$$

et

$$\left(\sum_{n=0}^{2k-2} a_n X^n\right)_{|(1+\widetilde{U}+\widetilde{U}^2)} = 3 \sum_{n \equiv k-1 \pmod 3} a_n X^n. \tag{3.4.2}$$

Il découle de (3.4.1) que l'on a

$$\begin{aligned} \dim W_k^S &= \#\{0 \leq n \leq 2k-2 \mid n \equiv k \pmod 2\} \\ &= \begin{cases} k-1 & \text{si } k \text{ est impair} \\ k & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

et de (3.4.2) que l'on a

$$\begin{aligned} &\dim W_k^U \\ = \ &\#\{0 \leq n \leq 2k-2 \mid n \equiv k,\ k+1 \pmod 3\} \\ = \ &\begin{cases} \frac{4k-4}{3} & \text{si } k \equiv 1 \pmod 3 \\ 2\left[\frac{2k-2}{3}\right] + 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\dim W_k^S + \dim W_k^U = 2d_k + 2k.$$

On a donc $\dim Z_0^1(\Gamma, \mathbf{V}) \leq 2d_k + 2k$.

Mais ajouter un polynôme de degré $\leq 2k-2$ à une intégrale abélienne généralisée F ne change pas la classe du cocycle associée, on a donc en fait $\dim H_0^1(\Gamma, \mathbf{V}) \leq 2d_k + 1$. Enfin les polynômes $c(S)$ et $c(U)$ sont reliés : ils ont le même terme constant. On en conclut que $\dim H_0^1(\Gamma, \mathbf{V}) \leq 2d_k$; cela termine la démonstration du théorème 2.5. □

Remarque. L'application qui à $f \in \mathcal{S}_k$ associe

$$P_S(X) = -\frac{1}{(2k-1)!} \int_0^\infty f(z)(z-X)^{2k-2} dz \in W_k \tag{3.4.3}$$

est injective. Un raisonnement similaire à celui fait ci-dessus implique même que la partie paire, resp. impaire, de P_S suffit à déterminer f. Puisque l'on a identifier $H_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$ au quotient $W_k/\langle 1 - X^{2k-2}\rangle$, les parties paires et impaires de (3.4.3) donnent un isomorphisme explicite entre $\mathcal{S}_k \oplus \mathcal{S}_k$ et $H_0^1(\Gamma, \mathbf{V})$.

3.5 Théorème d'Eichler-Shimura

La généralisation du théorème 2.5 à tout groupe fuchsien est maintenant appelé théorème de Eichler-Shimura. Notons que Eichler développe cette théorie afin d'obtenir une formule des traces — appelée formule des traces de Eichler-Selberg — pour les opérateurs de Hecke sur l'espace des formes modulaires. C'est seulement après cette dernière étape que l'aspect arithmétique des périodes polynomiales a réellement commencé.

Partie II. Invariants des formes quadratiques

Avoir avoir considéré les invariants arithmétiques des formes linéaires Poincaré considère les invariants arithmétiques des formes quadratiques. Soit d un entier qui n'est pas un carré. On note $\mathcal{Q}_d$ l'ensemble des formes quadratiques (de deux variables) $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 = [a,b,c]$ avec $a,b,c \in \mathbf{Z}$ et $d = b^2 - 4ac$. Puisque d n'est pas un carré, une forme quadratique $Q \in \mathcal{Q}_d$ ne peut être factorisée en un produit de deux formes linéaires entières. Si $\mathcal{Q}_d$ est non vide on a $d \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$. De plus si $Q \in \mathcal{Q}_d$, la forme quadratique Q est indéfinie si $d > 0$ et définie positive si $d < 0$. On représente aussi une forme quadratique $Q = [a,b,c]$ par la matrice symétrique $\left(\begin{smallmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{smallmatrix}\right)$ de sorte que

$$\left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ opère naturellement sur $\mathcal{Q}_d$ par $(g, Q) \mapsto Q \circ {}^t g$, où g opère linéairement sur $\mathbf{R}^2$ identifié à l'espace des vecteurs colonnes $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

Il n'est pas difficile de vérifier, après Lagrange, que toute $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-orbite dans $\mathcal{Q}_d$ contient une forme quadratique $Q = [a,b,c]$ telle que $|b| \leq |a| \leq |c|$. On en déduit alors facilement que le quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathcal{Q}_d$ est fini.

Poincaré appelle *invariant arithmétique* une application $F : \mathcal{Q}_d \to \mathbf{C}$ qui est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-invariante. La deuxième partie de son long mémoire de 1905 est consacrée à ces derniers. Avant d'en donner une brève description, rappelons qu'une forme quadratique $Q = [a,b,c]$ est dite *primitive* si $(a,b,c) = 1$; c'est une propriété qui est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-invariante. Si d est un entier $\equiv 0$ ou $1 \pmod 4$ qui n'est pas un carré, le *nombre de classes* $h(d)$ est le nombre (fini ≥ 1) de classes primitives dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathcal{Q}_d$ qui sont definies positives si $d < 0$; c'est la constante fondamentale de la théorie.

4 Invariants des formes quadratiques définies

L'espace des formes quadratiques définies positives considérées à homothétie près s'identifie au quotient

$$\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}(2) = \mathbf{H}.$$

En coordonnées, toute forme quadratique définie positive de discriminant 1 peut s'écrire

$$Q_z(u,v) = y^{-1}|uz + v|^2$$

avec $z = x + iy \in \mathbf{H}$. De plus l'application $z \mapsto Q_z$ est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-équivariante. L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur l'espace $\mathbf{H}$ des formes quadratiques est propre, on peut donc plus généralement rechercher des invariants continus, c'est-à-dire des applications continues $F : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ invariantes sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. De tels invariants sont maintenant appelés *formes automorphes non holomorphes.*

4.1 Séries d'Eisenstein non holomorphes

Dans un premier paragraphe Poincaré fait essentiellement remarquer que les invariants $F : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ présentent une plus grande variété que ceux des formes linéaires : on peut ainsi considérer les séries

$$\begin{aligned} E(z,s) &= \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{Q_z(m,n)^s} \qquad (4.1.1) \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{y^s}{|mz+n|^{2s}} \end{aligned}$$

pour tout nombre *complexe* s de partie réelle > 1. Ce sont les séries d'Eisenstein non holomorphes.

4.2 Fonctions zeta

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{Q}_d$ avec $d < 0$. Toutes les formes quadratiques que nous considérons sont supposées définies positive (autrement dit $Q = [a,b,c]$ avec $d = b^2 - 4ac$ et $a > 0$). Une forme dans $\mathcal{Q}_d$, considérée modulo homothétie, donne un point dans $\mathbf{H}$ et, l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}$ étant propre, on retrouve que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathcal{Q}_d$ est fini. Évaluée en $Q = [a,b,c]$ l'invariant (4.1.1) donne la série

$$\begin{aligned} \zeta_Q(s) &= \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{Q(m,n)^s} \qquad (4.2.1) \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^s}. \end{aligned}$$

Comme le remarque Poincaré, ces invariants ont été introduits par Dirichlet qui les a utilisé pour démontrer sa fameuse expression analytique du nombre de classes. Pour simplifier l'exposition nous ne considèrerons ici — comme Poincaré et avant lui Dirichlet — que le cas où $d = -p$ avec p premier congru à 3 modulo 4 et $p \neq 3$; nous notons $h = h(d) = h(-p)$.

4.3 Théorème (Formule du nombre de classes)**.** *On a :*[8]

$$h = \frac{2\sqrt{p}}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n}, \qquad (4.3.1)$$

où $\left(\frac{n}{p}\right)$ *est le symbole de Legendre égal à* 1 *si* n *est un carré non nul modulo* p, -1 *si* n *n'est pas un carré modulo* p *et* 0 *si* p *divise* n.

8. On reconnaitra dans le membre de droite l'évaluation en 1 d'une série de Dirichlet.

4.4 Séries theta

Poincaré propose une démonstration légèrement différente de cette formule : plutôt que d'utiliser les séries (4.2.1) il remarque que les séries — déjà considérées par Dirichlet —

$$\Theta_Q(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2} q^{am^2+bmn+cn^2}, \quad \text{avec } q = e^{2\pi iz} \ (z \in \mathbf{H}), \tag{4.4.1}$$

définissent aussi des invariants arithmétiques. Les séries (4.2.1) et (4.4.1) sont d'ailleurs liées par la transformation de Mellin :

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta_Q(s) = \int_0^\infty y^s\left(\Theta_Q(iy) - 1\right)\frac{dy}{y}. \tag{4.4.2}$$

Mais Poincaré "préfère" travailler avec les séries (4.4.1) car il démontre le théorème suivant.

4.5 Théorème. *La fonction Θ_Q vérifie :*

$$\Theta_Q(z) = \frac{i}{2\sqrt{d}z}\Theta_Q\left(-\frac{1}{4|d|z}\right) \quad (z \in \mathbf{H}). \tag{4.5.1}$$

Il s'en déduit que la fonction $f : z \in \mathbf{H} \mapsto \Theta_Q(z)^2$ vérifie

$$f_{|2g}(z) = f(z)$$

pour tous $z \in \mathbf{H}$ et $g \in \Gamma_0(4|d|)$. [9]

Ici $\Gamma_0(4|d|)$ est le sous-groupe de congruence du groupe modulaire défini par

$$\Gamma_0(4|d|) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod{4d} \right\}.$$

Le théorème 4.5 fait donc le lien entre la théorie de Dirichlet et la théorie des fonctions automorphes.

La démonstration que donne Poincaré du théorème est encore celle que l'on trouve par exemple dans [5, Proposition 10.1]. Elle repose sur la formule de Poisson dont il donne une interprétation "physique" liée à l'équation de la chaleur sur le tore.

4.6 Formule asymptotique

Comme le remarque Poincaré,

> l'étude de ce groupe fuchsien [le groupe $\Gamma_0(4|d|)$] jetterait sans doute quelque lumière sur les propriétés arithmétiques des formes quadratiques,

mais c'est une piste qu'il ne poursuit pas. Il faudra attendre Siegel pour tirer tout le sel de ce point de vue. Poincaré se contente de déduire de (4.5.1) que

$$\Theta_Q(iy) \sim \frac{1}{2\sqrt{|d|y}}, \quad \text{quand } y \to 0. \tag{4.6.1}$$

9. Autrement dit f est modulaire de poids 2 pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(4|d|)$).

Remarque. L'équation (4.4.2) transforme (4.6.1) en l'équivalent

$$\zeta_Q(s) \sim \frac{1}{s-1}\frac{\pi}{\sqrt{d}}, \quad \text{quand } s \to 1,$$

qui joue un rôle clef dans la démonstration de Dirichlet du théorème 4.3. Noter que Kronecker précise cette propriété en calculant la limite, quand $s \to 1$, de la différence $\zeta_Q(s) - \frac{1}{s-1}\frac{\pi}{\sqrt{d}}$ — c'est la seconde formule limite de Kronecker, voir [8].

4.7 Démonstration du théorème 4.3

Expliquons maintenant comment Poincaré déduit le théorème 4.3 de (4.6.1). Supposons donc $d = -p$ avec p premier congru à 3 modulo 4 et $p \neq 3$. Fixons un sous-ensemble fini $S \subset \mathcal{Q}_d$ qui contient exactement un représentant de chaque classe d'équivalence primitive (et positive) dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathcal{Q}_d$.

La première étape est un lemme de base — également dû à Dirichlet — dans la théorie des formes quadratiques. Étant donné un entier $n > 0$ on note

$$R(n,Q) = \#\{(x,y) \in \mathbf{Z}^2 \mid Q(x,y) = n\}$$

et

$$R(n) = \sum_{Q\in S} R(n,Q).$$

4.8 Lemme. *On a :*

$$R(n) = 2\sum_{m|n}\left(\frac{m}{p}\right).$$

Démonstration. Puisque les seules éléments de norme 1 dans l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ sont ± 1, le nombre $R(n)$ est égal au double du nombre d'idéaux de $\mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-p}}{2}\right]$ de norme n. [10] En décomposant n en nombre premiers on obtient que

$$R(n) = 2\sum_{m|n}\chi(m),$$

où χ est le charactère du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ — qui à un nombre premier ℓ asocie 1, -1 ou 0 selon que ℓ soit inert, split ou ramifié (c'est-à-dire ici $\ell = p$). Finalement, puisque $-p \equiv 1 \pmod 4$, on a $\chi = (\cdot/p)$, voir [1, p. 260–275]. $\square$

10. Ce procédé est bien dans l'esprit de ce que propose Poincaré lui-même lorsqu'il considère les formes indéfinies.

4.9

Il découle du lemme 4.8 que l'on a :

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in S}\Theta_Q(z) &= \sum_{Q\in S}\sum_{(x,y)\in\mathbf{Z}^2} q^{ax^2+bxy+cy^2}\\ &= h+\sum_{n=1}^{\infty}R(n)q^n\\ &= h+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m|n}\left(\frac{m}{p}\right)\right)q^n \qquad (4.9.1)\\ &= h+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)q^{km}\\ &= h+2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)\frac{q^m}{1-q^m}.\end{aligned}$$

Il resulte de (4.6.1) que le membre de gauche est équivalent à $\frac{h}{2\sqrt{py}}$ lorsque l'on fait tendre $z = iy$ vers 0 (dans $\mathbf{H}$). D'un autre côté on a :

$$\frac{q^m}{1-q^m} = \frac{1}{2\pi y}\frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

quand $q = e^{-2\pi y}$ avec $y \to 0^+$.

Il découle donc de (4.9.1) que l'on a :

$$\frac{h}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)\frac{1}{m}.$$

Ce qui démontre le théorème 4.3. □

Dans la suite, Poincaré donne quelques développements supplémentaires que nous ne discuterons pas. De manière plus fondamentale il passe ensuite à l'étude des formes quadratiques indéfinies.

5 Invariants des formes quadratiques indéfinies

L'espace des formes quadratiques indéfinies considérées à homothétie près s'identifie maintenant au quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}(1,1)$ (que l'on peut identifier à l'hyperboloïde à une nappe). Poincaré commence par faire remarquer que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur cet espace n'est plus propre et qu'on ne peut donc espérer définir un invariant continu sur tout l'espace comme la série (4.9.1) dans le cas des formes définies. On peut néanmoins se restreindre à l'espace $\mathfrak{Q}_d$ comme expliqué plus haut.

Dans cette section on suppose $d > 0$ et, pour simplifier l'exposition, $d \equiv 1 \pmod 4$. Tout point du quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}(1,1)$ correspond à une géodésique de $\mathbf{H}$. Et si Q est une forme quadratique dans $\mathfrak{Q}_d$, Poincaré fait remarquer que le groupe $\Gamma_Q = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid gQ = Q\}$ est infini.

5.1 Le groupe des automorphes de Q

On peut associer à une matrice hyperbolique

$$g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \quad (|\alpha+\beta| > 2)$$

une forme quadratique entière

$$Q_g(x,y) = \gamma x^2 + (\delta-\alpha)xy - \beta y^2$$

de discriminant $D = (\alpha+\delta)^2 - 4 > 0$. Deux matrices de même trace sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ si et seulement si les formes quadratiques correspondantes sont $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-équivalentes.

On associe réciproquement à toute forme quadratique entière $Q = [a,b,c] \in \mathfrak{Q}_d$, la géodésique orientée $\gamma(\theta_1,\theta_2)$ de $\mathbf{H}$ qui relie les deux racines (réelles)

$$\theta_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

de l'équation de degré deux : $Q(z,1) = 0$. Le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ qui fixe Q est un groupe de Lie de dimension 1 (c'est le groupe $\mathrm{SO}(Q)$), avec deux composantes connexes (les stabilisateurs des deux nappes de l'hyperbole $Q(x,y) = -1$). On vérifie qu'il est égal au groupe

$$\left\{\pm\begin{pmatrix}\frac{t-Bu}{2} & -Cu\\ Au & \frac{t+Bu}{2}\end{pmatrix} \;\middle|\; u,t\in\mathbf{R},\ t^2-Du^2=4\right\}.$$

Son intersection Γ_Q avec $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ contient toutes les matrices telles que t et u soient entiers ; on a même une égalité lorsque a, b et c sont premiers entre eux. Modulo $\pm I$ c'est donc un groupe infini et cyclique engendré par

$$g_Q = \begin{pmatrix}\frac{t_0-bu_0}{2} & -cu_0\\ au_0 & \frac{t_0+bu_0}{2}\end{pmatrix}, \qquad (5.1.1)$$

où t_0 et u_0 sont strictement positifs et forment une solution fondamentale de l'équation de Pell $t^2 - du^2 = 4$. (Remarquons que l'on peut toujours supposer que ce générateur a une trace strictement positive.)

L'élément $g_Q \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est primitif et son axe est la géodésique $\gamma(\theta_1,\theta_2)$, sa projection dans $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ est une géodésique fermée orientée de longueur

$$2\log\left(\frac{t_0+\sqrt{d}u_0}{2}\right). \qquad (5.1.2)$$

Posons $\varepsilon_d = \frac{(t_0+\sqrt{d}u_0)}{2}$.

On a donc construit une application

$$Q \mapsto g_Q$$

qui, à une forme quadratique $Q \in \mathfrak{Q}_d$, associe un élément hyperbolique primitif dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. L'image de cette application ne changeant pas si on remplace Q

par une forme quadratique qui lui est positivement proportionnelle, on obtient plus naturellement une application des formes quadratiques primitives, vers les éléments primitifs de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. L'application qui à g associe l'unique forme entière primitive positivement proportionnelle à Q_g est clairement une application réciproque. Remarquons finalement que ces applications commutent aux actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur les formes quadratiques et, par conjugaison, sur les éléments primitifs. On en déduit la proposition suivante.

5.2 Proposition. *L'application $Q \in \mathcal{Q}_d \mapsto g_Q$ induit une bijection entre les classes d'équivalence de formes quadratiques primitives dans $\mathcal{Q}_d$ et les géodésiques orientées fermées de longueur $2\log \varepsilon_D$ dans la surface moduire $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathbf{H}$. Le cardinal de ces deux ensembles finis est le nombre de classes $h(d)$.*

En particulier on retrouve bien que le quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathcal{Q}_d$ est fini.

5.3 Nombre de classe

Il découle en particulier de la non-finitude de Γ_Q que l'ensemble des couples $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$ pour lesquelles Q prend une même valeur est infini. La série (4.2.1) n'est donc pas bien définie. Il faut en modifier la définition. C'est déjà ce qu'avait fait Dirichlet. Avant de rappeler la méthode de Dirichlet, Poincaré relie l'étude des formes quadratiques dans $\mathcal{Q}_d$ aux "nombres idéaux" dans le corps quadratique réel $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$: soit $M \subset \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ un sous-$\mathbf{Z}$-module de rang 2. On appelle *norme* $\mathrm{N}(M)$ de M le p.g.c.d. des normes $\mathrm{N}(\xi) = \xi\xi'$ d'éléments $\xi \in M$, où $\xi \mapsto \xi'$ est l'involution de Galois, et on note $M_+^\times$ le groupe des unités ε totalement positives ($\varepsilon \gg 0$ i.e. $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' > 0$) telles que $\varepsilon M = M$. Étant donnée une base ξ_1, ξ_2 de M, on asocie à la norme la forme quadratique primitive

$$Q_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{1}{\mathrm{N}(M)}(x\xi_1 + y\xi_2)(x\xi_1' + y\xi_2');$$

elle est à coefficients entiers et de discriminant

$$D(M)/\mathrm{N}(M)^2,$$

où $D(M)$ — le *discriminant* de M — est le nombre (rationnel) $D(M) = (\xi_1\xi_2' - \xi_1'\xi_2)^2$, indépendant du choix ξ_1, ξ_2 de base de M. Noter que $D(M)/\mathrm{N}(M)^2$ est égal au discriminant du $\mathbf{Z}$-module $\mathcal{O}_M = \{\mu \in \mathbf{Q}(\sqrt{d}) \mid \lambda M = M\}$; il est donc égal à d — le discriminant du corps [11] $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ — si et seulement si M est un idéal (fractionnaire).

Deux idéaux fractionnaires non nuls sont équivalents au sens strict si leur quotient est un idéal fractionnaire principal (μ) engendré par un élément μ totalement positif. Si ξ_1, ξ_2 est une base d'un idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$, la classe de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$-équivalence de Q_{ξ_1,ξ_2} ne dépend que de la classe d'équivalence au sens strict de $\mathfrak{a}$. L'application $[\mathfrak{a}] \mapsto [Q_{\xi_1,\xi_2}]$ définit une bijection de ce quotient vers l'ensemble des classes d'équivalence de formes quadratiques binaires entières, primitives et de discriminant d. Le nombre $h(d)$ est donc égal au nombre de classes restreint du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

Remarque. Partant d'une forme primitive $Q = [a,b,c] \in \mathcal{Q}_d$, on peut prendre pour idéal fractionnaire le $\mathbf{Z}$-module engendré par 1 et θ_2, on dit de cet idéal fractionnaire qu'il est primitif. C'est un idéal de norme a^{-1}. Géométriquement, la matrice

$$\kappa := \begin{pmatrix} 1 & -\theta_2 \\ 1 & -\theta_1 \end{pmatrix} \tag{5.3.1}$$

envoie la géodésique $\gamma(\theta_1,\theta_2)$ sur $\gamma(0,\infty)$, la matrice $\kappa\delta\kappa^{-1}$ est donc diagonale égale à

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_d & 0 \\ 0 & \varepsilon_d^{-1} \end{pmatrix}.$$

Les différents éléments primitifs g_Q — associés à un système de représentants des différentes classes primitives dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathcal{Q}_d$ — correspondent donc à la solution fondamentale de l'équation de Pell $t^2 - du^2 = 4$ (l'unité fondamentale dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$) vue à travers différentes $\mathbf{Z}$-bases de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ qui correspondent aux différentes classes d'idéaux.

5.4 Fonctions zeta partielles

Ces considérations conduisent Poincaré à envisager de remplacer (4.2.1) par la fonction zêta du corps quadratique réel $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^s} \tag{5.4.1}$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt tous les idéaux de l'anneaux des entiers de K. Noter que la série (5.4.1) se décompose en une somme de $h(d)$ séries

$$\zeta_K(s) = \sum_{[\mathfrak{b}]} \left(\sum_{\mathfrak{a}\in[\mathfrak{b}]} \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^s} \right),$$

où la première somme porte sur l'ensemble des classes (strictes) d'idéaux fractionnaires du corps K et, dans la deuxième somme, $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers dans la classe $[\mathfrak{b}]$. Considérons une classe restreinte $[\mathfrak{b}]$. On peut supposer que l'idéal fractionnaire $\mathfrak{b}$ est primitif. On a alors :

$$\sum_{\mathfrak{a}\in[\mathfrak{b}]} \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^s} = \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{b})^s} \sum_{\mathfrak{b}^{-1}|(\mu)\neq 0} \frac{1}{\mathrm{N}(\mu)^s}, \tag{5.4.2}$$

11. Autrement dit, de son anneau des entiers

$$\mathcal{O}_d = \left\{ m + n\frac{(1+\sqrt{d})}{2} \mid m, n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

où (μ) parcourt l'ensemble des idéaux fractionnaires principaux non nuls divisibles par $\mathfrak{b}^{-1}$ et tels que $\mathrm{N}(\mu)$ soit positif. En échangeant $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}^{-1}$, on obtient finalement :

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{b}} \mathrm{N}(\mathfrak{b})^s \zeta_{\mathfrak{b}}(s), \tag{5.4.3}$$

où $\mathfrak{b}$ parcourt un ensemble de représentants primitifs des classes restreintes d'idéaux fractionnaires et

$$\zeta_{\mathfrak{b}}(s) = \sum_{\mathfrak{b}|(\mu)\neq 0} \frac{1}{\mathrm{N}(\mu)^s} = \sum_{\substack{\mu\in\mathfrak{b}/\mathfrak{b}_+^\times \\ \mu\gg 0}} \frac{1}{\mathrm{N}(\mu)^s}. \tag{5.4.4}$$

5.5 Retour aux formes quadratiques

Noter que si $\mathfrak{b}$ est l'idéal fractionnaire associé à une forme primitve $Q \in \mathcal{Q}_d$ comme dans la remarque ci-dessus et si $\mu = n + m\theta_2 \in \mathfrak{b}$, alors on a $\mathrm{N}(\mu) = a^{-1}Q(n,m) = \mathrm{N}(\mathfrak{b})Q(n,m)$, de sorte que l'expression $\mathrm{N}(\mathfrak{b})^s\zeta_{\mathfrak{b}}(s)$ est du même type que (4.2.1) sauf que l'on ne somme pas tous les $\frac{1}{Q(n,m)^s}$. En effet, si $\mu_1 = n_1 + m_1\theta_2$ et $\mu_2 = n_2 + m_2\theta_2$ engendrent le même idéal fractionnaire principal ils diffèrent par une unité et le terme $\frac{1}{\mathrm{N}(\mu_1)^s} = \frac{1}{\mathrm{N}(\mu_2)^s}$ n'intervient qu'une fois dans la somme $\zeta_{\mathfrak{b}}(s)$. Cela correspond au fait que les couples (n_1, m_1) et (n_2, m_2) diffèrent par un élément de Γ_Q. Le problème initial est donc résolu. On vérifie alors facilement que les séries $\zeta_{\mathfrak{b}}(s)$ (et donc $\zeta_K(s)$) sont absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Dans la suite Poincaré ne poursuit malheureusement pas l'étude de la fonction $\zeta_K(s)$ mais cherche, comme dans le cas des formes définies, à exprimer les séries $\zeta_{\mathfrak{b}}(s)$ comme transformées de Mellin de fonctions automorphes. Il n'y parvient pas, attacher une forme automorphe à un corps quadratique réel est en effet plus délicat, voir [5, Chap. 12]. Notons qu'en passant, il évoque plus généralement les séries [12]

$$L_{\mathfrak{b}}(s, \lambda^k) = \sum_{\mathfrak{b}|(\mu)\neq 0} \frac{\lambda^k(\mu)}{\mathrm{N}(\mu)^s}, \tag{5.5.1}$$

où, pour tout $\mu \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ on note [13]

$$\lambda^k(\mu) = \left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{\frac{i\pi k}{\log \varepsilon_d}}.$$

La fonction $L_{\mathfrak{b}}(s, \lambda^k)$ est un cas particulier des fonctions L que Hecke considèrera plus tard.

Soit $Q \in \mathcal{Q}_d$ primitive. On a associé à Q la géodésique $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ de $\mathbf{H}$. Cette géodésique se projette sur une géodésique fermée dans la surface modulaire. Parmi les formes équivalentes à Q il n'y a donc qu'un nombre fini de formes *réduites* c'est-à-dire telle que la géodésique correspondante intersecte non trivialement le domaine fondamental standard de l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}$. On peut vérifier que [14]

$$\mathrm{N}(\mathfrak{b})^s\zeta_{\mathfrak{b}}(s) = \sum_Q \left({\sum_{m,n}}' \frac{1}{Q(m,n)^s} \right),$$

où Q parcourt les formes réduites dans la classe des formes quadratiques correspondant à $\mathfrak{b}$ et, cette fois, le symbole $\sum'$ est défini par

$$\begin{aligned} &{\sum_{m,n}}' f(m,n) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f(m,n) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} f(m,0) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} f(0,n). \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

C'est essentiellement la réécriture que propose Poincaré ; il en donne néanmoins une interprétation géométrique différente en termes de cones. On peut en effet plonger le module $\mathfrak{b}$, comme réseau, dans $\mathbf{R}^2$ par $\mu \mapsto (\mu, \mu')$. L'ensemble $\{\mu \in \mathfrak{b} \mid \mu \gg 0\}$ s'identifie alors à $\mathfrak{b} \cap \mathbf{R}_+^2$ et la sommation ci-dessus correspond à un sommation sur les points de $\mathfrak{b} \cap \mathbf{R}_+^2$ appartenant à un cone qui est un domaine fondamental pour l'action de $\mathfrak{b}_+^\times$.

Poincaré préfère là encore considérer l'expression

$$F_Q(y) = {\sum_{m,n}}' e^{-Q(m,n)y} \quad (y > 0),$$

dont la somme ${\sum_{m,n}}' \frac{1}{Q(m,n)^s}$ se déduit par transformation de Mellin. Il conclut son mémoire par une expression intégrale de $F_Q(y)$ dont il ne tire aucune conséquence mais qui est similaire à l'expression qu'obtient Zagier dans [11] et qui est suffisante pour

1. démontrer la formule de Dirichlet pour les corps quadratiques réels ;
2. démontrer que les fonctions (5.5.1) peuvent être prolongées à tout le plan complexe, ou encore
3. étendre la formule limite de Kronecker aux corps quadratiques réels (cf. [8]).

Les calculs de Poincaré sont durs à suivre. Plutôt que de les détailler, concluons par une interprétation moderne de ce que Poincaré aurait pu faire.

Chaque élément $Q \in \mathcal{Q}_d$ primitif définit, non plus un point de $\mathbf{H}$, mais une géodésique dans $\mathbf{H}$. On voudrait donc moyenner l'invariant (4.9.1) le long de cette géodésique pour obtenir un invariant arithmétique. Ce n'est pas directement possible puisqu'une géodésique est infinie. Mais puisque $Q \in \mathcal{Q}_d$ on sait en outre que la géodésique associée à Q possède un stabilisateur infini cyclique dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. On est donc naturellement amené à former la moyenne de l'invariant (4.1.1) sur la géodésique fermée associée à Q dans la surface modulaire. C'est ce que nous étudions dans ce dernier paragraphe.

12. Séries qu'il avait déjà considérées en 1881 dans une note publiée dans le *Bulletin de l'Association française*, voir le tome V des *Œuvres*.
13. On remarquera que $\lambda^k(\varepsilon\mu) = \lambda^k(\mu)$ pour toute unité ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.
14. Voir [11] pour plus de détails.

5.6 Périodes hyperboliques

Plutôt que de travailler avec Q on préfère considérer l'idéal fractionnaire $\mathfrak{b}$ qui lui est associé. La série $E(z,s)$ est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-invariante ; elle est en particulier δ-invariante et la fonction $z \mapsto E(\kappa^{-1}z, s)$ est invariante par l'homothétie $z \mapsto \varepsilon_D^2 z$:

$$E(\kappa^{-1}z,s) = E(\delta\kappa^{-1}z,s) = E(\kappa^{-1}(\varepsilon_D^2 z),s).$$

La restriction de l'application $z \mapsto E(\kappa^{-1}z,s)$ à la géodésique $\gamma(0,\infty) = \{iv \mid v > 0\}$ est donc (multiplicativement) ε_D^2-périodique.

5.7 Proposition. *On a :*

$$\int_1^{\varepsilon_D^2} E(\kappa^{-1}(iv),s)\frac{dv}{v} = d^{\frac{s}{2}}\frac{\Gamma(s/2)^2}{\Gamma(s)}\mathbf{N}(\mathfrak{b})^s\zeta_{\mathfrak{b}}(s).$$

Démonstration. Puisque

$$\kappa^{-1}(iv) = \frac{-i\theta_1 v + \theta_2}{-iv+1}$$

est de partie imaginaire

$$\frac{v(\theta_2-\theta_1)}{1+v^2},$$

on a

$$\begin{aligned}&E(\kappa^{-1}(iv),s)\\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{v^s(\theta_2-\theta_1)^s}{((m\theta_1+n)^2v^2+(m\theta_2+n)^2)^s}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\int_1^{\varepsilon_D^2} E(\kappa^{-1}(iv),s)\frac{dv}{v}\\ &= (\theta_2-\theta_1)^s\sum_{\mu\neq 0} N(\mu)^{-s}\int_{\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|}^{\varepsilon_D^2\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|}\left(\frac{v}{v^2+1}\right)^s\frac{dv}{v},\end{aligned} \tag{5.7.1}$$

où la somme porte sur tous les éléments non nuls du $\mathbf{Z}$-module engendré par 1 et θ_2 : $\mu = m\theta_2 + n$ (et $\mu' = m\theta_1 + n$). Ces éléments appartiennent donc à l'idéal $\mathfrak{b}$ et $\theta_2 - \theta_1 = \sqrt{d}\mathbf{N}\mathfrak{b}$.

Deux éléments $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ engendrent le même idéal si et seulement si leur quotient est une unité de $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$. En remplaçant, dans le membre de droite de (5.7.1), la somme sur les éléments non nuls $\mu \in \mathfrak{b}$ par une somme sur les idéaux (μ) et les entiers $m \in \mathbf{Z}$, puissances de ε_d, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_1^{\varepsilon_D^2} E(\kappa^{-1}(iv),s)\frac{dv}{v}\\ &= d^{\frac{s}{2}}\mathbf{N}(\mathfrak{b})^s\sum_{\mathfrak{b}|(\mu)\neq 0} N(\mu)^{-s}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{\left|\frac{\mu'\varepsilon_d^m}{\mu\varepsilon_d^m}\right|}^{\varepsilon_d^2\left|\frac{\mu'\varepsilon_d^m}{\mu\varepsilon_d^m}\right|}\left(\frac{v}{v^2+1}\right)^s\frac{dv}{v}.\end{aligned} \tag{5.7.2}$$

Puisque $\left|\frac{\varepsilon_d\mu}{\varepsilon_d'\mu'}\right| = |\varepsilon_d^2|\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|$ la somme sur $m \in \mathbf{Z}$ dans (5.7.2) est égale à

$$\int_0^\infty \left(\frac{v}{v^2+1}\right)^s\frac{dv}{v}.$$

On a que

$$\begin{aligned}&\int_1^{\varepsilon_D^2} E(\kappa^{-1}(iv),s)\frac{dv}{v}\\ &= d^{\frac{s}{2}}\mathbf{N}(\mathfrak{b})^s\sum_{\mathfrak{b}|(\mu)\neq 0} N(\mu)^{-s}\int_0^\infty\left(\frac{v}{v^2+1}\right)^s\frac{dv}{v}.\end{aligned}$$

Il reste à calculer :

$$\begin{aligned}&\Gamma(s)\int_0^\infty\left(\frac{v}{v^2+1}\right)^s\frac{dv}{v}\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty t^s\left(\frac{v}{v^2+1}\right)^s e^{-t}\frac{dv}{v}\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{t}{v+v^{-1}}\right)^s e^{-t}\frac{dv}{v}\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{tv}{v+v^{-1}}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\frac{tv^{-1}}{v+v^{-1}}\right)^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{tv}{(v+v^{-1})}}e^{-\frac{tv^{-1}}{(v+v^{-1})}}\frac{dv}{v}\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty \tau_1^{\frac{s}{2}}e^{-\tau_1}\frac{d\tau_1}{\tau_1}\int_0^\infty \tau_2^{\frac{s}{2}}e^{-\tau_2}\frac{d\tau_2}{\tau_2}\\ &= \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Pour finalement obtenir la proposition. □

Il n'est alors pas difficile de déduire la formule du nombre de classes pour les corps quadratiques réels en suivant la même approche que dans le cas des corps quadratiques complexes. On peut plus généralement — comme Hecke le fera plus tard — déduire de la proposition 5.7 et de l'équation fonctionnelle pour la série (4.1.1) que la série $\zeta_{\mathfrak{b}}(s)$ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe, vérifie une équation fonctionnelle. On peut aussi en déduire l'extension au cas des corps quadratiques réels de la formule limite de Kronecker. Pour tout ceci on renvoie au beau livre de Siegel [8].

Remerciement

Je tiens à remercier Sadok Kallel pour son invitation à publier cet article dans le Graduate Journal of Mathematics.

Références

[1] Z. I. Borevich & I. R. Shafarevich – *Number theory*, Academic press, 1966.

[2] W. Duke, O. Imamoglu & A. Toth – « Rational period functions and cycle integrals », *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **80** (2010), p. 255–264.

[3] M. Eichler – « Eine verallgemeinerung der abelschen integrale », *Math. Z.* **67** (1957), p. 267–298.

[4] S. S. Gelbart – *Automorphic forms on adèle groups*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1975, Annals of Mathematics Studies, No. 83.

[5] H. Iwaniec – *Topics in classical automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 17, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[6] P. Sarnak – *Some applications of modular forms*, Cambridge University Press, 1990.

[7] J.-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977, Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.

[8] C. L. Siegel – *Advanced analytic number theory*, second éd., Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 9, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980.

[9] G. N. Watson – *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Reprint of the second (1944) edition.

[10] A. Weil – *Elliptic functions according to eisenstein and kronecker*, Springer, 1998.

[11] D. Zagier – « Valeurs des fonctions zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs », in *Astérisque*, vol. 41–42, Société Mathématique de France, 1977, p. 135–151.

Nicolas Bergeron
Sorbonne Université,
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche,
CNRS, Univ Paris-Diderot,
F-75005 Paris, France.

E-mail address: nicolas.bergeron@imj-prg.fr

Website: http://people.math.jussieu.fr/~ bergeron