

Systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants et fonctions harmoniques



JEAN D'ALMEIDA

Abstract

On étudie les systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants et on en déduit des applications aux fonctions G -harmoniques pour un sous-groupe fini G du groupe linéaire.

We study linear partial differential equations systems with constant coefficients and give applications to G -harmonic functions for G a finite subgroup of the general linear group.

Keywords: PDE with constants coefficients , harmonic functions.

MSC 2020. Primary: 35C11, 35E20, Secondary: 35N05, 14C17, 20F55, 34M10

1 Introduction

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ les opérateurs différentiels associés. On considère l'anneau $\mathbb{C}[\partial] = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$. Un idéal I de $\mathbb{C}[\partial]$ correspond à un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Si $I = (P_1, \dots, P_k)$, on s'intéresse aux fonctions f qui sont C^∞ (resp. holomorphes) sur Ω telles que $P_j f = 0$ pour $j = 1, \dots, k$. On note $Sol(I)$ l'espace des solutions. Il existe des solutions de type polynôme - exponentielle

$$q(x)\exp\langle u, x \rangle = q(x_1, \dots, x_n)\exp(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)$$

où q est un polynôme et $u = (u_1, \dots, u_n)$ est un point du schéma $Z(I)$ des zéros de I dans $\mathbb{C}^n$. On peut montrer que toute solution peut être approchée par des solutions combinaisons linéaires de solutions de type polynôme-exponentielle ([3] p 198). C'est le théorème d'approximation d'Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov. Les espaces de fonctions sont munis des topologies habituelles de la convergence uniforme sur les compacts (avec les dérivées partielles de tous ordres dans le cas réel).

La situation est particulièrement intéressante lorsque $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial]/I$ est finie. L'idéal I définit alors un sous-schéma affine de dimension zéro de $\mathbb{C}^n$. On montre dans ce cas que

toute solution est combinaison linéaire de solutions de type polynôme-exponentielle et que l'espace des solutions est de dimension finie égale à $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial]/I$. On donne une majoration du degré des polynômes. Lorsque le maximum est atteint, tout autre polynôme solution est obtenu en dérivant le polynôme de degré maximum.

On peut étudier ces phénomènes dans le cadre suivant. On considère un sous-groupe fini G de $GL(n, \mathbb{C})$. On a une action naturelle de G sur $\mathbb{C}[\partial] = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$. La sous-algèbre $\mathbb{C}[\partial]^G$ des invariants est de type fini. On note $P_1, \dots, P_k$ des générateurs et on considère le système d'équations aux dérivées partielles $P_j f = 0, j = 1, \dots, k$. Les solutions sont appelées fonctions G -harmoniques. On montre que ce sont des polynômes et on donne une majoration de leurs degrés. Le degré maximal est atteint si et seulement si le groupe est cyclique engendré par une réflexion.

REMERCIEMENTS: Je tiens à remercier le referee pour sa lecture attentive du manuscrit.

2 Le Théorème de Structure

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), soient $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) et soient $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ les opérateurs différentiels associés. Soit

$$I = (P_1, \dots, P_k) \subset \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$$

un idéal. On note $Sol(I)$ l'espace vectoriel des fonctions f qui sont C^∞ (resp. holomorphes) sur Ω telles que $P(f) = 0$ pour tout $P \in I$. On suppose que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial]/I < \infty$. Le schéma des zéros $Z(I)$ de I est fini : $Z(I) = \{u^{(1)}, \dots, u^{(r)}\} \subset \mathbb{C}^n$ avec $u^{(i)} = (u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)})$. L'idéal I a une décomposition primaire unique $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_r$ où Q_i est primaire avec pour radical l'idéal maximal du point $u^{(i)}$. On a

$$\sqrt{Q_i} = (\partial_1 - u_1^{(i)}, \dots, \partial_n - u_n^{(i)})$$

Etant donné un opérateur $p \in \mathbb{C}[\partial]$, on note $p(\partial + u^{(i)})$ l'opérateur obtenu en remplaçant ∂_j par $\partial_j + u_j^{(i)}$ dans p . Le translaté

$$\text{shift}(Q_i) = \{p(\partial + u^{(i)}), p \in Q_i\}$$

a alors pour radical $(\partial_1, \dots, \partial_n)$. On note $\text{shift}(Q_i)^\perp$ l'espace des polynômes $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ annulés par les opérateurs de $\text{shift}(Q_i)$. Si O_i désigne l'anneau local de $\mathbb{C}^n$ en $u^{(i)}$, on a $\mathbb{C}[\partial]/I = \prod_{i=1}^r O_i/IO_i$. La multiplicité de $u^{(i)}$ comme point de $Z(I)$ est $\mu_i = \dim_{\mathbb{C}} O_i/IO_i$ et on a

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial]/I = \sum_{i=1}^r \mu_i$$

Theorem 2.1.

(1) L'espace $Sol(I)$ des solutions est un espace vectoriel de dimension finie isomorphe à $\mathbb{C}[\partial]/I$. Il est engendré par les fonctions

$$q(x) \exp\langle u^{(i)}, x \rangle = q(x_1, \dots, x_n) \exp(u_1^{(i)} x_1 + \dots + u_n^{(i)} x_n)$$

avec $i = 1, \dots, r$ et $q(x) \in \text{shift}(Q_i)^\perp$.

(2) Si $q(x) \exp\langle u^{(i)}, x \rangle$ est une solution, alors le degré de q vérifie $\deg(q) \leq \mu_i - 1$ où μ_i est la multiplicité de $u^{(i)}$ comme point du schéma $Z(I)$.

(3) Si $q(x) \in \text{shift}(Q_i)^\perp$ avec $\deg(q) = \mu_i - 1$ alors $\text{shift}(Q_i)^\perp = \mathbb{C}[\partial]q$. C'est un $\mathbb{C}[\partial]$ module monogène engendré par q .

PREUVE: 1) Le point 1 a été établi dans [1] et [5] par deux méthodes différentes.

2) On établit d'abord le résultat suivant:

Soit K un corps commutatif et A une K -algèbre locale d'idéal maximal $\mathcal{M}$. Si J est un idéal de A tel que $\dim_K A/J = \mu < \infty$ alors $J \supset \mathcal{M}^\mu$.

En effet si $f_1, \dots, f_\mu$ sont des éléments arbitraires de $\mathcal{M}$, on doit montrer que $f_1 f_2 \dots f_\mu \in J$. Les classes de $1, f_1, f_1 f_2, \dots, f_1 f_2 \dots f_\mu$ sont linéairement dépendantes dans A/J . On peut donc trouver une combinaison linéaire non triviale

$$c_0 + c_1 f_1 + c_2 f_1 f_2 + \dots + c_\mu f_1 f_2 \dots f_\mu \in J, c_j \in K$$

Soit t le plus petit entier tel que $c_t \neq 0$. On a $f_1 \dots f_t (c_t + c_{t+1} f_{t+1} + \dots + c_\mu f_{t+1} \dots f_\mu) \in J$. Le terme à l'intérieur de la parenthèse n'appartient pas à $\mathcal{M}$ sinon la constante non nulle serait dans $\mathcal{M}$. Le terme à l'intérieur de la parenthèse est donc un élément inversible de A donc $f_1 f_2 \dots f_t \in J$. Il en résulte que $f_1 f_2 \dots f_\mu \in J$. On a

$$\mathbb{C}[\partial]/I = \prod_{i=1}^r O_i/IO_i$$

Il suffit de se ramener par translation à l'origine. On suppose donc que $\mathbb{C}[\partial] = O_o/IO_o$ où O_o est l'anneau local de $\mathbb{C}^n$ à l'origine. Si $\dim_{\mathbb{C}} O_o/IO_o = \mu$, le résultat qu'on vient d'établir montre que $IO_o \supset \mathcal{M}^\mu$ où $\mathcal{M}$ est l'idéal maximal de O_o . Cet idéal est $(\partial_1, \dots, \partial_n)O_o$. En particulier tout élément g de $(\partial_1, \dots, \partial_n)^\mu$ de $\mathbb{C}[\partial]$ s'écrit $g = \sum_{j=1}^k P_j A_j / B_j$ avec $A_j, B_j \in \mathbb{C}[\partial]$, $B_j(0) \neq 0$ et $I = (P_1, \dots, P_k)$. Il en résulte que $B_1 \dots B_k g \in I$. Mais $B_1 \dots B_k(0) \neq 0$ donc $B_1 \dots B_k \notin \sqrt{I} = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ (théorème des zéros de Hilbert). Il en résulte que $g \in I$ (I est primaire). On a donc montré que $I \supset (\partial_1, \dots, \partial_n)^\mu$. Si un polynôme q est annulé par tout opérateur différentiel appartenant à $(\partial_1, \dots, \partial_n)^\mu$ alors $\deg(q) \leq \mu - 1$.

3) On se ramène par translation à la situation $I = Q$ avec $\sqrt{Q} = (\partial_1, \dots, \partial_n)$. On suppose qu'il existe une solution de I qui est un polynôme de degré $\mu - 1$ avec $\mu = \dim \mathbb{C}[\partial]/I$. Si $\deg(q) \geq 1$, alors il existe au moins un indice t tel que $\frac{\partial q}{\partial x_t} \neq 0$. On choisit un tel indice. Si

à nouveau $\deg(\frac{\partial q}{\partial x_t}) \geq 1$ on peut recommencer. Ceci montre que le module $\mathbb{C}[\partial]q$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à μ . Or $\mathbb{C}[\partial]q \subset \text{Sol}(I)$ et $\dim_{\mathbb{C}} \text{Sol}(I) = \mu$. Il en résulte que $\text{Sol}(I) = \mathbb{C}[\partial]q$. $\square$

3 Fonctions G -Harmoniques

On considère un sous-groupe fini G d'ordre g de $GL(n, \mathbb{C})$. Il en résulte une action de G sur l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$. On sait que la sous-algèbre des invariants est de type fini et engendrée par des polynômes homogènes de degré positif notés $P_1, \dots, P_k$. On note I_G l'idéal de $\mathbb{C}[\partial]$ engendré par $P_1, \dots, P_k$. C'est l'idéal de Hilbert de G . On note $H_G = \text{Sol}(I_G)$ l'espace des fonctions qui vérifient $P(f) = 0$ pour tout $P \in I_G$. Les éléments de H_G sont appelés fonctions G -harmoniques ([2]).

On peut alors établir le résultat suivant :

Theorem 3.1. Soit $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ un sous-groupe fini d'ordre g . On note I_G l'idéal de Hilbert et H_G l'espace des fonctions harmoniques de G .

- (1) Les fonctions G -harmoniques sont des polynômes.
- (2) Le degré d'un polynôme G -harmonique est inférieur ou égal à $g - 1$.
- (3) Le degré d'un polynôme G -harmonique est inférieur ou égal à $\dim H_G - 1$ et la borne est atteinte si et seulement si G est cyclique engendré par une réflexion.

PREUVE: (1) On utilise le théorème 2.1. On s'intéresse aux zéros de l'idéal de Hilbert I_G . C'est ce qu'on appelle le null-cone en théorie des invariants pour un groupe réductif. C'est l'ensemble des éléments dont la clôture de Zariski de l'orbite sous G contient 0. Si le groupe est fini, le null-cone est réduit à 0. D'après le point 1 du théorème les éléments de $Sol(I_G)$ sont donc des polynômes.

(2) On va d'abord montrer que tout élément homogène de $\mathbb{C}[\partial]$ de degré supérieur ou égal à g appartient à l'idéal de Hilbert I_G . En effet si A est un anneau commutatif unitaire, G un groupe fini d'automorphismes de A et $J \subset A$ un idéal G -stable de A alors $J^{|G|} \subset J^G A$ où $J^G A$ désigne l'idéal de A engendré par les éléments G -invariants de J et $|G|$ l'ordre de G supposé inversible dans A . En effet on note $\prod_{\sigma \in G} f_\sigma$ un produit de g éléments de I . Pour tout $\tau \in G$ on a

$$\prod_{\sigma \in G} (\tau(\sigma f_\sigma) - f_\sigma) = 0$$

En développant et en sommant sur tous les τ de G on obtient

$$\sum_{M \subset G} (-1)^{|G \setminus M|} \left(\sum_{\tau \in G} \prod_{\sigma \in M} \tau(\sigma f_\sigma) \right) \cdot \left(\prod_{\sigma \in G \setminus M} f_\sigma \right) = 0$$

Dans cette somme le terme pour $M = \emptyset$ est au signe près $|G| \prod_{\sigma \in G} f_\sigma$. Les autres sont dans $J^g A$. On a donc obtenu que $\prod_{\sigma \in G} f_\sigma \in J^G A$. On applique ceci avec $A = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ et $J = (\partial_1, \dots, \partial_n)$. L'idéal $I_G = J^G A$ contient alors tous les opérateurs homogènes de degré g . Une fonction solution de tout opérateur différentiel d'ordre g est un polynôme de degré inférieur ou égal à $g - 1$.

(3) On rappelle d'abord quelques résultats sur les groupes engendrés par des réflexions. Une réflexion de $\mathbb{C}^n$ est une application linéaire distincte de l'identité, d'ordre fini et ayant un hyperplan de points fixes. Si G est un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{C})$, Steinberg ([4]) a montré que G est engendré par des réflexions si et seulement si $\dim H_G = |G|$ et ceci est équivalent au fait que H_G est monogène comme $\mathbb{C}[\partial]$ -module. Lorsque c'est le cas il existe à une constante près un unique polynôme homogène qui engendre H_G . Le degré de ce polynôme est égal au nombre de réflexions dans G . La majoration résulte du point 2 du théorème 2.1.

On suppose qu'il existe un polynôme G -harmonique P avec

$$\deg(P) = \dim H_G - 1$$

Le point 3 du théorème 2.1 donne alors $H_G = \mathbb{C}[\partial]$. D'après [4] le groupe G est alors engendré par des réflexions et $\dim H_G = |G| = g$. Le degré de P est donc $g - 1$ et le groupe G contient $g - 1$ réflexions. Tout élément de G autre que l'identité est donc une réflexion. Si le produit de deux réflexions est une réflexion alors elles ont même hyperplan de points fixes. On en déduit que toutes les réflexions de G ont le même hyperplan de points fixes. Il en résulte aisément que G est cyclique.

On suppose maintenant que G est cyclique engendré par une réflexion. Tout élément autre que l'identité est alors une réflexion. Le groupe contient donc $g - 1$ réflexions. Il existe donc un polynôme G -harmonique de degré $g - 1$. Mais $\dim H_G = g$. $\square$

Remarque 3.2. R. Steinberg a obtenu pour le point (2) la borne $(g - 1)^n$ ([4]). La borne obtenue ici est optimale.

References

- [1] J. D'ALMEIDA, *Systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants associés aux idéaux de colongueur finie*, Enseignement Mathématique (2) **50** (2004) 19–27.

- [2] S. HELGASON, *Groups and geometric analysis*, Acad Press Inc (1984).
- [3] L. HORMANDER, *Complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand Company Inc (1967).
- [4] R. STEINBERG, *Differential equations invariant under finite reflection groups*, Transactions AMS **112** (1964), 392–408.
- [5] B. STURMFELS, *Solving Systems of Polynomial Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics Volume **97** (2002), AMS.

Jean D'Almeida

LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ,
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE LILLE, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE.

E-mail address: `jean.d-almeida@univ-lille.fr`